

5. Exercices d'entraînement et de préparation au DS

Exercice 5.A Soient f une fonction définie sur \mathbb{R} et \mathcal{C}_f sa courbe représentative. Le tableau de variations de la fonction f est donné ci-dessous :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	2	-4	$+\infty$

1. Lire dans le tableau de variations les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$
2. Dédurre de la question précédente l'existence d'une asymptote à la courbe \mathcal{C}_f
3. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x) > 100$ pour tout réel $x > x_0$?

Exercice 5.B Soit f une fonction définie sur $] -1; 3[\cup]3; 7]$ telle que :

- f est décroissante sur $] -1; 3]$ et sur $]3; 7]$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = -\infty$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x) = +\infty$, et $f(7) = 1$

On nomme \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f .

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f
2. (a) La courbe \mathcal{C}_f admet-elle des asymptotes ? Si oui, en donner une équation.
(b) Tracer dans un repère une allure de la courbe \mathcal{C}_f et ses asymptotes.

Exercice 5.C Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (7x^3 - 9x^2 + 2)$
2. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f\left(\frac{1}{x} + 2x + 3\right)$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 7x + 1)$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(2 - x)$
5. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x - 3)\left(2 - \frac{1}{x}\right)$
6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3 - e^x)(2 + e^x)$

Exercice 5.D Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + 5x + 2$.

Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 5.E Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle $]4; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{-x+4} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{3x}{-x+4}$$

Calculer les limites des fonctions f et g en 4 et en $+\infty$

Exercice 5.F Soient g et h les fonctions définies sur \mathbb{R} par $g(x) = e^{2-3x}$ et $h(x) = (2 - 3x)^4$.

1. Écrire la fonction g comme composée de deux fonctions, puis déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Calculer les limites de la fonction h en $-\infty$ et en $+\infty$.

Exercice 5.G Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x + \cos(x)$

1. Montrer que pour tout réel x , $x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$
2. (a) Calculer la limite de f en $+\infty$
(b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

Exercice 5.H Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - xe^x)$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)$
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + 1)e^x$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x}$